A Grubu

Adı Soyadı:

Numarası:

Cevap Anahtarı

25.03.2022

CEBİR II QUİZ A GRUBU SORULARI

1) Her $a,b \in \mathbb{Z}$ için

$$a \oplus b = a + b + 1$$
$$a \odot b = a.b + a + b$$

işlemleritanımlanıyor. Bu durumda $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ 'nın halka olduğu bilindiğine göre

a) (15p) Bu halka birimli olur mu? Araştırınız.

b) (15p) Bu halka tam halka olur mu? Araştırınız.

c) (15p) Bu halka tamlık bölgesi olur mu? Araştırınız.

d) (15p) Bu halka cisim olur mu? Araştırınız.

e) (10p) Halkanın karakteristiğini bulunuz.

2) (30p) R birimli bir regüler halka olsun. $0 \neq a \in R$ için $a \in R$ ya sıfır bölendir ya da birimseldir, gösteriniz.

BAŞARILAR

Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) a) Halkanın birimli olması için $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $a \odot e = a \wedge e \odot a = a$ o.ş $e \in \mathbb{Z}$ var olmalıdır

$a \odot e = a \Rightarrow ae + a + e = a \Rightarrow ae + e = 0$
$\Rightarrow (a+1)e = 0$
$\Rightarrow \boxed{e = 0}$

$e \odot a = a \Rightarrow ea + e + a = a \Rightarrow e(a+1) = 0$
$\Rightarrow \boxed{e = 0}$

Halkanın birimi vardır. ve 0 dır

b) Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir. önce halkanın sıfırını bulalım.

$a \oplus 0_{\mathbb{Z}} = a$ o.ş $0_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ bulalım

$\Rightarrow a + 0_{\mathbb{Z}} + 1 = a \Rightarrow 0_{\mathbb{Z}} = -1$ bulunur

O halde $a \neq -1$ ve $a \odot b = -1$ olsun.

$a \odot b = ab + a + b = -1 \Rightarrow ab + a + b + 1 = 0$
$\Rightarrow (a+1)(b+1) = 0$
$\stackrel{a \neq -1}{\Rightarrow} b + 1 = 0$
$\Rightarrow b = -1 = 0_{\mathbb{Z}}$. Yani

halka sıfır bölensizdir Tam halkadır

c) Tamlık bölgesi için birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olmalıdır a ve b şıklarında birimli ve sıfır bölensiz olduğunu gördük O halde değişmeli olur mu? bakalım $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$a \odot b = ab + a + b = ba + b + a = b \odot a$$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli

Yani Tamlık bölgesidir

d) Cisim olması için halkanın sıfırı dışında her elemanının terslenebilir olması gerekir $a \neq -1$ alalım $\forall a \in \mathbb{Z}$ i[illegible]

$a \odot a^{-1} = 0$ o.ş $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ var mıdır

$\Rightarrow a a^{-1} + a + a^{-1} = 0$

$\Rightarrow a^{-1}(a+1) = -a \Rightarrow a^{-1} = -\dfrac{a}{a+1} \notin \mathbb{Z}$

Cisim değildir

e) Birimli bir halkada birim elemanın mertebesi halkanın karakteristiğine eşittir Birim eleman 0 old

$n.0 = -1$ o.ş n pozitif tam sayısı var mıdır?

Varsa bu tam sayıların en küçüğü bize karakteristiği verir

Böyle bir sayı yoksa karakteristik sıfırdır

$k(\mathbb{Z}) = 0$ dır

2) R regüler halka ise $\forall a \in R$ için $a = aba$ o.ş $b \in R$ vardır $0 \neq a \in R$ sıfır bölen olmasın. O halde

$a - aba = 0_R$

$\Rightarrow$ ~~$(1_R - ab)a = 0_R$~~

$\Rightarrow 1_R - ab = 0_R$

$\Rightarrow ab = 1_R$

$aba - a = 0_R$

$\Rightarrow a(ba - 1_R) = 0_R$

$\Rightarrow ba - 1_R = 0_R$

$\Rightarrow ba =$

$\Rightarrow a$ birimsel (terslenebilir) eleman olur

Bu şekilde $0 \neq a \in R$ birimsel olmasın. $ab = 1_R$ ve $ba = 1_R$ o.ş $b \in R$ yoktur O halde $1 - ba \in R$ ve $1 - ba \neq 0_R$ dır

$a.(1-ba) = a - aba = 0_R$. Yani a sıfır bölen elemandır

Scanned with CamScanner

B Grubu

25.03.2022

Adı Soyadı: Cevap Anahtarı
Numarası:

CEBİR II QUİZ B GRUBU SORULARI

1) (30p) H birimli bir regüler halka olsun. $0 \neq x \in H$ için $x \in H$ ya sıfır bölendir ya da birimseldir, gösteriniz.

2) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x \oplus y = x + y + 1$$
$$x \odot y = x.y + x + y$$

işlemleri tanımlanıyor. Bu durumda $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ 'nın halka olduğu bilindiğine göre

a) (15p) Bu halka birimli olur mu? Araştırınız.

b) (15p) Bu halka tam halka olur mu? Araştırınız.

c) (15p) Bu halka tamlık bölgesi olur mu? Araştırınız.

d) (15p) Bu halka cisim olur mu? Araştırınız.

e) (10p) Halkanın karakteristiğini bulunuz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1) H regüler halka ise $\forall x \in H$ için $x = xyx$ o.ş. $y \in H$ vardır. $0 \neq x \in H$ sıfır bölen olmasın. O halde

$x - xyx = 0_H$ | $xyx - x = 0_H$
$\Rightarrow (1 - xy)x = 0_H$ | $\Rightarrow x(yx - 1) = 0_H$
$\Rightarrow 1 - xy = 0_H$ | $\Rightarrow yx - 1 = 0_H$
$\Rightarrow xy = 1_H$ | $\Rightarrow yx = 1_H$

$\Rightarrow x$ birimsel (terslenebilir) eleman olur.

Benzer şekilde $0 \neq x \in H$ birimsel olmasın. O halde $xy = yx = 1_H$ o.ş. $y \in H$ yoktur. Yani $1 - xy \in H$ ve $1 - xy \neq 0$ dır.

$(1 - xy)x = x - xyx = 0_H$ olup x sıfır bölen elemandır.

2) a) Halkanın birimli olması için $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$x \odot e = x \wedge e \odot x = x$ öş $e \in \mathbb{Z}$ var olmalıdır

$$x \odot e = x \Rightarrow xe + x + e = x \qquad e \odot x = x \Rightarrow ex + e + x = x$$
$$\Rightarrow (x+1)e = 0 \qquad \Rightarrow e(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow e = 0 \qquad \Rightarrow e = 0$$

Halkanın birimi vardır ve 0 dır

b) Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir

Önce halkanın sıfırını bulalım

$x \oplus 0_{\mathbb{Z}} = x$ öş $0_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ bulalım

$\Rightarrow x + 0_{\mathbb{Z}} + 1 = x \Rightarrow 0_{\mathbb{Z}} = -1$ bulunur

O halde $x \neq -1$ ve $x \odot y = -1$ olsun

$$x \odot y = xy + x + y = -1 \Rightarrow xy + x + y + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x+1)(y+1) = 0$$
$$\Rightarrow y + 1 = 0$$
$$\Rightarrow y = -1 = 0_{\mathbb{Z}}$$

Yani halka sıfır bölensiz olur Tam halkadır

c) Tamlık bölgesi için birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olmalıdır Geriye sadece değişmelilik kaldı

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$x \odot y = xy + x + y \underset{\substack{(\mathbb{Z},+) \\ (\mathbb{Z},\cdot)\ \text{değişmeli}}}{=} yx + y + x = y \odot x$$

Tamlık bölgesidir

d) Cisim olması için $x \neq -1$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ terslenebilir olmalıdır

$x \odot x^{-1} = 0$ öş $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ var mıdır?

$$\Rightarrow x \cdot x^{-1} + x + x^{-1} = 0 \Rightarrow x^{-1} = \frac{-x}{x+1} \notin \mathbb{Z}.$$ Cisim değildir

$$\Rightarrow x^{-1}(x+1) = -x$$

e) Birimli bir halkada birim elemanın mertebesi halkanın karakteristiğine eşittir. Birim eleman 0 old.

$n \cdot 0 = -1$ öş n pozitif tam sayısı var mı?

Böyle bir tam sayı yoktur Yani $k(\mathbb{Z}) = 0$ dır

Scanned with CamScanner